

Combinatorial methods in cooperative game theory

Citation for published version (APA):

Kuipers, J. (1994). *Combinatorial methods in cooperative game theory*. [Doctoral Thesis, Maastricht University]. Datawyse / Universitaire Pers Maastricht. <https://doi.org/10.26481/dis.19940615jk>

Document status and date:

Published: 01/01/1994

DOI:

[10.26481/dis.19940615jk](https://doi.org/10.26481/dis.19940615jk)

Document Version:

Publisher's PDF, also known as Version of record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.umlib.nl/taverne-license

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

repository@maastrichtuniversity.nl

providing details and we will investigate your claim.

Samenvatting

In dit proefschrift beschouwen we situaties waar een groep van individuen een samenwerkingsverband kan aangaan. Door het sluiten van zo'n onderlinge verbintenis zal de groep in het algemeen efficiënter kunnen functioneren, dan wanneer de individuen afzonderlijk werken. Dit maakt samenwerking aantrekkelijk. De individuen worden *spelers* genoemd. We nemen aan dat niet alleen de groep van alle spelers kan samenwerken, maar dat ook elke deelgroep van spelers een onderlinge verbintenis kan aangaan. Een samenwerkingsverband van een deelgroep wordt een *coalitie* genoemd. De *karakteristieke functie* geeft weer welke kosten of winsten aan iedere mogelijke coalitie gekoppeld zijn. Spelersverzameling en karakteristieke functie tesamen noemen we een *cooperatief spel*.

De cooperatieve speltheorie is de tak van wiskunde die bovenstaande situaties beschrijft en bestudeert. Twee probleemstellingen zijn van belang: welke coalities zullen zich vormen en hoe moeten de gemaakte winsten of kosten van een coalitie verdeeld worden over de spelers in zo'n coalitie. Vaak is het niet onredelijk om te veronderstellen dat alle spelers in een spel zullen samenwerken in wat we de *grote coalitie* zullen noemen. Ook in dit proefschrift zullen we telkens deze veronderstelling maken. We concentreren ons op de vraag hoe de kosten of winsten van de grote coalitie verdeeld moeten worden over de spelers.

Een methode die voorschrijft hoe deze verdeling moet plaatsvinden wordt een *oplossingsconcept* genoemd. Tal van oplossingsconcepten zijn in de literatuur beschreven, zoals de core, de nucleolus en de Shapley waarde. Bij een spel met n spelers kunnen zich $2^n - 1$ coalities vormen. Voor de zojuist genoemde oplossingsconcepten kan de waarde van iedere coalitie van belang zijn in hun berekening, zodat deze berekening al snel een praktisch onmogelijke taak wordt.

Om deze reden zijn er oplossingsconcepten bedacht waarvoor de berekening slechts een deel van de karakteristieke functie vereist. Ook wordt onderzoek verricht naar klassen van spelen waarbij de karakteristieke functie een zodanige structuur heeft dat de gangbare oplossingsconcepten eenvoudig berekenbaar zijn. Beide onderzoekslijnen raken elkaar als voor een bepaalde klasse van spelen het vereenvoudigde oplossingsconcept met een gangbaar oplossingsconcept overeenkomt.

Dit proefschrift kan men zien in het licht van dit type onderzoek. We behandelen verschillende klassen van cooperatieve spelen waarbij de karakteristieke functie van het spel bepaald wordt door een combinatorisch optimaliseringsprobleem. Een voorbeeld hiervan is de klasse van minimaal opspannende boom spelen, waarbij de waarde van een coalitie bepaald wordt door een minimaal opspannende boom probleem, een bekend probleem uit de combinatorische optimalisering. De karakteristieke functie van minimaal opspannende boom spelen blijkt een structuur te hebben die de analyse van het spel vereenvoudigt. We onderzoeken de eigenschappen van de core en de nucleolus voor een aantal klassen van spelen die samenhangen met een probleem uit de combinatorische optimalisering.

Hoofdstuk 1 van het proefschrift is inleidend. In hoofdstuk 2 beschouwen we spelen waarbij slechts een deel van de coalities zich werkelijk kan vormen. We geven condities op deze collectie van formeerbare coalities die het niet leeg zijn van de core garanderen en die berekening van een core element of de nucleolus aanmerkelijk vereenvoudigen.

In hoofdstuk 3 beschouwen we spelen die gerelateerd zijn aan het handelsreizigersprobleem. Bij een bepaalde variant van dit type spelen, de routingsspelen, blijkt slechts een klein deel van de coalities relevant te zijn voor berekening van de core en de nucleolus. Hier kunnen de resultaten uit hoofdstuk 2 gebruikt worden voor een efficiënte berekening van deze oplossingsconcepten.

Hoofdstuk 4 behandelt verschillende varianten van spelen die verband houden met het minimaal opspannende boom probleem. Ook hier blijkt weer dat de resultaten uit hoofdstuk 2 toegepast kunnen worden om berekening van core elementen en de nucleolus te vereenvoudigen.

In hoofdstuk 5 beschouwen we spelen waarbij de coalitie waarden bepaald worden door een meer-dimensionaal toekenningprobleem. Omdat de core voor dit soort spelen leeg kan zijn, introduceren we een verwant oplossingsconcept, de k -core, en we analyseren enkele eigenschappen van de k -core met betrekking tot meer-dimensionale toekenningsspelen.

Tenslotte, in hoofdstuk 6, stellen we onze interesse in het aantal extreme punten van de core. We tonen aan dat dit aantal ten hoogste $n!$ is als n het aantal spelers in het spel is. We geven ook bovengrenzen voor dit aantal als slechts een deel van de coalities formeerbaar is. Een van de nevenresultaten van dit onderzoek laat zien dat de core van een routingsspel met n spelers ten hoogste $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ extreme punten heeft.